

## 基于因子图的分布式变分稀疏贝叶斯压缩感知

朱翠涛, 杨凡, 汪汉新, 李中捷

(中南民族大学 智能无线通信湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430073)

**摘要:** 提出了一种基于因子图的分布式变分稀疏贝叶斯压缩感知算法。该算法利用因子图和变分方法将全局感知问题分解为简单的局部问题, 通过认知用户邻居间的置信传播实现“软融合”, 使每个认知用户能够获得全局最优估计。且充分利用邻居间传递的信息所具有的时间和空间二维相关性, 提高认知用户在低信噪比下的感知性能。同时, 算法在迭代过程中自适应地删除不收敛的超参数及对应的基函数, 降低通信负载。实验结果表明: 该方法在低采样率和低信噪比下有较好的感知性能。

**关键词:** 认知无线电; 频谱感知; 因子图; 变分稀疏贝叶斯学习

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2014)01-0140-08

## Distributed variational sparse Bayesian compressed sensing based on factor graphs

ZHU Cui-tao, YANG Fan, WANG Han-xin, LI Zhong-jie

(Hubei Key Laboratory of Intelligent Wireless Communications, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430073, China)

**Abstract:** A distributed variational sparse Bayesian compressed spectrum sensing algorithm based on factor graph was proposed, which decomposed the global spectrum sensing problem into local problem based on factor and variation. Belief propagation was used for the statistical inference of the spectrum occupancy, to implement the “soft fusion”. The temporal and spatial correlation information providing two-dimensional redundancies was exchanged among cooperative cognitive users to improve the detection performance under low SNR. Meanwhile, the algorithm prunes the divergence of hyper-parameters and the corresponding basis functions for reducing the load of communication. The simulation results show that this method can effectively achieve performance of spectrum sensing under a low sampling rate and the low SNR.

**Key words:** cognitive radio; spectrum sensing; factor graph; variational sparse Bayesian learning

### 1 引言

在认知无线网络中, 动态频谱共享机制分为覆盖式 (overlay)、共存式 (underlay) 和混合方式<sup>[1]</sup>。在这些共享机制中, 除了对授权频谱的使用情况进行检测外, 有关授权用户的其他信息, 如发送功率、位置、个数等也应及时、准确感知, 才能避免对授权用户造成干扰, 实现频谱安全共享。然而, 在感知过程中, 认知用户接收的信号可能经历了深衰落、阴影效应、噪声等影响, 使得单个认知用户无

法准确地对相关信息进行感知。于是, 协同感知引起学者们的关注。文献[2]在平均一致框架下, 以相邻节点的观测作为约束通优化算法实现协同频谱感知, 利用约束条件迫使网络中各认知用户的频谱感知结果达到全局最优。这种方法在协同用户数目较多时会造成较大的网络计算和通信开销。为了克服此问题, 文献[3]在压缩采样的框架下, 提出了一种基于一致优化的分布式宽带频谱压缩感知算法, 并引入加权的一致平均约束减少约束的数量, 由此降低计算开销及提高算法的收敛速度。为了改善协

收稿日期: 2013-06-30; 修回日期: 2013-11-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61072075, 61072051); 湖北省自然科学基金资助项目(2013CFB448)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (61072075, 61072051); The Natural Science Foundation of Hubei Province(2013CFB448)

同频谱检测性能，文献[4]结合一阶马尔可夫过程，通过贝叶斯推理及利用因子图中的消息传递实现协同检测任务。这些研究工作从不同角度对授权频谱感知方法进行了深入探索。而在未来的认知无线电网络中，多种频谱共享机制会同时存在，为了避免相互干扰，授权用户的其他信息也应及时感知。为此，文献[5]提出了基于稀疏贝叶斯压缩感知的联合频谱感知与定位算法，融合中心利用各认知用户的压缩测量值直接对授权用户的信息进行估计。但是，基于相关向量机的稀疏贝叶斯压缩感知算法复杂度较高，收敛速度慢。针对此问题，笔者在前期工作中<sup>[6]</sup>，提出了一种变分稀疏贝叶斯压缩感知方法，改善协同感知性能。由于该工作是基于集中式协同感知，通信负载比较大，且顽健性较差。

基于此，本文在前期工作的基础上，提出了一种基于因子图<sup>[7]</sup>的分布式变分稀疏贝叶斯频谱感知算法。该方法将联合频谱感知问题映射为因子图模型，通过认知用户邻居间的置信传播实现“软融合”，且传递的信息非压缩观测值或本地决策值，而是前一次迭代过程中的融合信息。邻居间传递的信息具有时间和空间相关性，充分利用这种二维相关性，提高认知用户在低信噪比下的检测性能。并将变分方法<sup>[8]</sup>用于稀疏贝叶斯框架中，简化推理过程。同时，为了降低通信负载，算法在迭代过程中自适应地删除不收敛的超参数及对应的基函数，从而减少分布式迭代过程中的通信量。

## 2 信号模型及问题提出

在认知无线网络中，假定某检测区域内有  $N_{\text{ch}}$  个授权信道，有  $N_p$  个处于活动状态的授权用户（简称 PU），且  $N_p \ll N_{\text{ch}}$ 。PU 随机分布在一定的区域里，其位置坐标表示为  $(x_m, y_n)$ 。  $x_m \in \{0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, (M-1)\Delta x\}$ ，  $y_n \in \{0, \Delta y, 2\Delta y, \dots, (N-1)\Delta y\}$ ，  $\Delta x, \Delta y$  分别是横坐标和纵坐标上的位置分辨率，表示位置识别精度。同时，检测区域中存在  $N_c$  个认知用户（简称 CR），其位置坐标分别表示为  $\{(z_1, w_1), (z_2, w_2), \dots, (z_{N_c}, w_{N_c})\}$ 。任意 CR 通过无线信道接收任意授权用户发射的信号，信号经过无线信道的路径损耗为<sup>[9]</sup>

$$L(\text{dB}) = 10 \log \left( \frac{P_t}{P_r} \right) \quad (1)$$

其中，  $P_t$  为发射功率，  $P_r$  为接收功率。路径损耗与频率、距离间的关系为<sup>[9]</sup>

$$L(f, d) = P_0 + 20 \lg(f) + 10n_0 \lg(d) \quad (2)$$

其中，  $P_0$  为一常量，  $n_0$  为路径损耗指数，由式（1）和式（2）可得接收功率与发射功率、距离及频率之间的关系为

$$P_r = P_t 10^{-0.1L(f, d)} \quad (3)$$

依据式（3），第  $k$  个认知用户通过第  $i$  个信道接收在位置  $(x_m, y_n)$  的授权用户发射的信号功率为

$$P_{r, k, i}(m, n) = P_t(m, n, i) \cdot 10^{-0.1L(f_i, d(m, n, k))} \quad (4)$$

其中，  $P_t(m, n, i)$  表示在位置  $(x_m, y_n)$  处的授权用户经过信道  $i$  发射信号的功率，  $f_i$  表示第  $i$  个信道所对应的频率，  $d(m, n, k)$  表示授权用户与认知用户  $k$  之间的距离，由式  $d(m, n, k) = \sqrt{(x_m - z_k)^2 + (y_n - w_k)^2}$  得到。那么，第  $k$  个认知用户通过第  $i$  个信道接收可能来自各授权用户的总信号功率为

$$Y_{k, i} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} P_{r, k, i}(m, n) = L^T(k, i) P_t(i) \quad (5)$$

其中，  $P_t(i)$  表示经第  $i$  个信道接收可能来自各授权用户发射信号功率组成的列向量，  $L^T(k, i)$  表示各授权用户发射信号的功率经信道  $i$  到达第  $k$  个认知用户的路径损耗组成的行向量。第  $k$  个认知用户可能通过各信道接收的信号功率表示为  $Y_k = [Y_{k, 1}, Y_{k, 2}, \dots, Y_{k, N_{\text{ch}}}]$ 。

由式（5）可得认知用户对授权用户进行感知的问题模型，用矩阵表示为

$$Y_k = L_k P_k, k = 1, 2, \dots, N_c \quad (6)$$

其中，矩阵  $L_k$  中的第  $i$  行表示为  $L_k(i, :) = [\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{L}^T(k, i), \vec{0}, \dots, \vec{0}]$ ，  $\vec{0}$  表示  $1 \times MN$  的 0 向量。

## 3 压缩感知模型

式（6）中包含了授权用户的相关信息，本文采用全分布式的协同感知方法对授权用户的相关信息感知。由于授权频段的利用率低，认知用户所接收的信号在频域具有稀疏性。因此，利用压缩感知理论，降低对宽带信号采样压力。设第  $k$  个认知用户在时域内检测到的信号为  $r_k$ ，根据傅立叶变换理论，可得

$$r_k = F^{-1} Y_k, k = 1, \dots, N_c \quad (7)$$

其中，  $F^{-1}$  为离散傅立叶逆变换矩阵。由式（6）、式（7）可得

$$r_k = F^{-1} L_k P_k = \Phi_k P_k, k = 1, \dots, N_c \quad (8)$$

其中,  $\Phi_k$  为测量矩阵, 它确定  $r_k$  与  $P_k$  之间关系。由于  $L_k$  表示无线信道的路径损耗, 具有非常强的随机性,  $\Phi_k$  满足 RIP<sup>[10]</sup>性质。在实际的传播环境中存在噪声干扰, 式 (8) 变换为

$$r_k = \Phi_k P_k + \varepsilon_k, k=1, \dots, N_c \quad (9)$$

其中,  $\varepsilon_k$  表示均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的高斯噪声向量。针对问题 (9), 可以将其转换为凸优化问题进行求解<sup>[11]</sup>, 但是, 算法的复杂度较高。本文充分利用贝叶斯推理的优势, 不需要恢复原始信号, 直接依据观测值  $r_k$  及先验信息进行相关参数的估计, 并通过因子图和变分方法将全局问题转换为分布式的局部问题进行简化求解。

## 4 变分稀疏贝叶斯推理

### 4.1 本地稀疏贝叶斯模型

稀疏贝叶斯压缩感知过程实质上是基于概率图模型的统计推理过程<sup>[12]</sup>。因此, 可构造一个贝叶斯网络模型描述线性回归问题 (9) 的推理过程, 如图 1 所示。

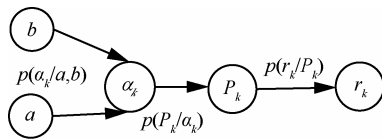


图 1 贝叶斯网络模型

式 (9) 中, 变量  $\varepsilon_k$  服从高斯分布, 可推导出未知参量  $P_k$  的似然函数服从均值为  $\Phi_k P_k$ , 方差为  $\sigma^2$  的高斯分布, 即

$$p(r_k | P_k) = N(r_k | \Phi_k P_k, \sigma^2) \quad (10)$$

由于授权用户随机选择一个信道进行数据发送, 且大部分授权信道是空闲的, 所以  $P_k$  具有稀疏性。依据稀疏贝叶斯模型<sup>[12]</sup>, 向量  $P_k$  中的任意元素  $P_j$  服从均值为 0, 方差为  $\alpha_j$  的高斯分布, 即

$$p(P_j | \alpha_j) = N(P_j | 0, \alpha_j^{-1}) \quad (11)$$

其中,  $\alpha_j$  为超参数, 其物理意义是表示本地子信道的占用情况。当  $\alpha_j$  的数值变得很大时, 根据高斯分布曲线特性,  $\alpha_j$  对应的  $P_j$  会迅速衰减为 0。又由于关于  $\alpha_j$  后验分布大数据出现的概率非常大, 这就决定了  $P_k$  中大部分元素为 0, 即  $\alpha_j$  决定  $P_j$  的稀疏性。

由于超参数是变量, 而且高斯分布方差的倒数的共轭概率分布为 Gamma 分布, 因此, 为超参数  $\alpha_j$  引

入一个 Gamma 分布, 即

$$p(\alpha_j) = \Gamma(\alpha_j | a, b) \propto \alpha_j^{a-1} e^{-b\alpha_j} \quad (12)$$

依据式 (10)~式 (12) 可以求得后验概率分布  $p(P_k / r_k, \alpha_k)$ 。然后, 通过最大后验概率进行参数  $P_k$  和  $\sigma^2$  估计。但是, 最大后验概率法只考虑了概率密度, 而忽略了积分的重要作用, 容易导致过拟合等严重问题。利用边缘似然函数可以简单地避免过拟合, 因为在边缘似然函数的计算过程中, 所有的未知参数被积分, 这样结果就不依赖于未知参数。但是, 边缘似然函数的计算要对所有的参数积分, 通常是高维和复杂的积分。为此, 本文采用变分方法进行推理过程的简化。

### 4.2 变分逼近

便于问题分析, 在稀疏贝叶斯架构下, 先形成协同频谱感知的全局问题, 然后逐步推导出分布式变分稀疏贝叶斯模型。为此, 定义全局未知变量的集合为  $P = [P_1, \dots, P_{N_c}]$ , 观测值集合  $r = [r_1, r_2, \dots, r_k \dots r_{N_c}]$ , 由式 (9) 可以得全局观测值为

$$r = [r_1, r_2, \dots, r_k \dots r_{N_c}] = \Phi P + \varepsilon \quad (13)$$

其中,  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N_c}]$  为高斯白噪声向量,  $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_{N_c}]$  为基函数矩阵。根据全局观测  $r$  与已知隐藏变量先验分布求解隐藏变量的后验分布  $p(P, \alpha | r)$ , 由贝叶斯公式可得后验分布为

$$p(P, \alpha | r) = \frac{p(r | P, \alpha) p(P, \alpha)}{p(r)}$$

采用稀疏贝叶斯方法求解后验分布, 则先将后验分布分解为:  $p(P, \alpha | r) = p(P | r, \alpha) p(\alpha | r)$ , 然后再用积分求解  $p(P | r, \alpha)$ , 算法实现复杂。所以, 通过变分近似进行简化。在稀疏贝叶斯模型中, 观测向量的边缘似然函数为

$$p(r) = \frac{p(r, P, \alpha)}{p(P, \alpha | r)} \quad (14)$$

依据变分理论<sup>[8]</sup>, 在式 (14) 中引入了一个关于变量  $P$ 、 $\alpha$  的  $q$  分布, 其表达式为

$$p(r) = \frac{p(r, P, \alpha)}{q(P, \alpha)} \bigg/ \frac{p(P, \alpha | r)}{q(P, \alpha)} \quad (15)$$

然后对式 (15) 两边取对数, 又由于  $\iint q(P, \alpha) dP d\alpha = 1$ , 所以, 式 (15) 可以转换为

$$\ln(p(r)) = \iint q(P, \alpha) \ln \frac{p(r, P, \alpha)}{q(P, \alpha)} dP d\alpha - \iint q(P, \alpha) \ln \frac{p(P, \alpha | r)}{q(P, \alpha)} dP d\alpha \quad (16)$$

将式 (16) 简记为

$$\ln(p(r)) = L(q(P, \alpha)) + KL(q(P, \alpha) \| p(P, \alpha | r)) \quad (17)$$

式 (17) 中,  $KL(q(P, \alpha) \| p(P, \alpha | r))$  称为 KL 散度, 表示概率分布  $q(P, \alpha)$  与后验分布  $p(P, \alpha | r)$  的近似程度。KL 散度值越小, 概率分布  $q(P, \alpha)$  与后验分布  $p(P, \alpha | r)$  越接近, 反之亦然。

变分贝叶斯方法是通过最小化 KL 散度寻找关于变量  $P, \alpha$  的  $q$  分布, 而 KL 散度依赖于难以求解的后验分布  $p(P, \alpha | r)$ 。根据 KL 散度的特性可知  $KL(q(P, \alpha) \| p(P, \alpha | r)) \geq 0$ , 由式 (17) 可以推导出

$$\ln(p(r)) \geq L(q(P, \alpha)) = \iint q(P, \alpha) \ln \frac{p(P, \alpha, r)}{q(P, \alpha)} dP d\alpha$$

其中,  $L(q(P, \alpha))$  是概率分布  $q(P, \alpha)$  与联合分布  $p(P, \alpha, r)$  组成的函数。由于  $p(P, \alpha, r)$  比后验分布  $p(P, \alpha | r)$  易于求解, 所以通过最大化  $L(q(P, \alpha))$  方法寻找关于变量  $P, \alpha$  的  $q$  分布比最小化 KL 散度更容易。同时, 根据均值域理论<sup>[10]</sup>, 关于  $P, \alpha$  的  $q$  联合分布为

$$q(P, \alpha) = q(P) \prod_{k=1}^{N_c} q(\alpha_k)$$

依据文献[13]可以求得关于变量  $P, \alpha$  的  $q$  分布的迭代优化更新表达式为

$$\ln q(P) = E_{q(\alpha)} \{ \ln [p(P | r) p(P | \alpha)] \} + const \quad (18)$$

$$\ln q(\alpha) = E_{q(P)} \{ \ln [p(P | \alpha) p(\alpha)] \} + const \quad (19)$$

式 (18) 和式 (19) 中的  $const$  表示与  $P, \alpha$  独立的部分。求解式 (18) 和式 (19), 可以得到关于变量  $P, \alpha$  的  $q$  分布为

$$q(P) = N(P | \bar{u}, \bar{\Sigma})$$

$$q(\alpha) = \prod_{j=1}^{N_{ch}} Ga(\alpha_j | a_j, b_j)$$

其中,

$$\bar{\Sigma} = (\text{diag}(\alpha_j) + \sigma^{-2} \Phi^T \Phi)^{-1}, \quad \bar{u} = \sigma^{-2} \bar{\Sigma} \Phi^T r \quad (20)$$

$$\bar{a}_j = a + 1/2, \quad \bar{b}_j = b + \frac{\bar{u}_j^2 + \bar{\Sigma}_{jj}}{2} \quad (21)$$

$$\alpha_j = \bar{a}_j / \bar{b}_j \quad (22)$$

其中,  $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_k]^T$ , 式 (21) 中  $\bar{u}_j$  表示向量  $\bar{u}$  中

第  $j$  个元素,  $\bar{\Sigma}_{jj}$  表示  $\bar{\Sigma}$  的第  $j$  个主对角元素。

## 5 因子图及置信传播

### 5.1 因子图表示

分布式的首要任务是将全局问题下的式 (18) 和式 (19) 转换为分布式形式。如果已知认知网络中的全局  $q(P)$  分布, 即参数  $\bar{u}, \bar{\Sigma}$  为已知, 那么可以根据式 (21) 在本地计算  $q(\alpha)$  中的参数  $\bar{a}_j, \bar{b}_j$ , 根据  $\alpha_j = \bar{a}_j / \bar{b}_j$  可以计算超参数  $\alpha$ 。这就意味着, 只要每个认知用户获得了  $q(P)$ , 就可在本地更新计算  $q(\alpha)$ 。因此, 只需将式 (18) 分解为分布式形式即可。为此, 本文引入因子图模型, 通过和积算法实现邻居间消息传递。引入  $N_c$  个超参数向量  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{N_c}$  分别与认知节点相对应, 通过消息传播使  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \dots = \bar{\alpha}_{N_c} = \bar{\alpha}$ , 即获得  $q(P)$ 。

因子图是一种用来描述如何将多变量的全局函数分解成多个局部函数乘积形式的双向图。利用因子图模型刻画式 (18) 的分布式形式, 通过在相应的因子图上分布地进行消息传递, 实现  $q(P_k) = q(P)$ 。相应的因子图模型, 如图 2 所示。

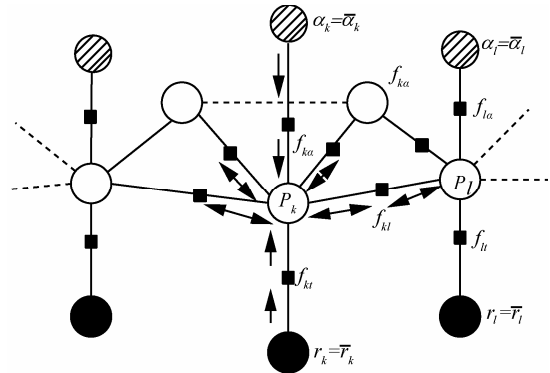


图 2 分布式稀疏贝叶斯因子图

图 2 由节点 (用圆表示) 和因子 (用黑方块表示) 组成, 节点表示变量, 因子表示节点之间的概率约束关系。其中, 节点分为 3 个层次, 最顶层是包含了所有认知用户中的超参数  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_c}\}$  集合, 中间层是由未知参量集合  $\{P_1, \dots, P_{N_c}\}$  组成, 最下层由观测向量的集合  $\{r_1, \dots, r_{N_c}\}$  组成。其中,  $\alpha_k = [\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,M}]^T$ ,  $P_k = [P_{k,1}, \dots, P_{k,M}]^T$ 。认知用户间通过耦合因子  $f_{kl}$  进行信息交互。在因子图中, 对于任意认知用户  $k$ , 节点  $\alpha_k$  与节点  $P_k$  间的因子定义为<sup>[14]</sup>

$$f_{k\alpha}(P_k, \alpha_k) = A_k \left|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} P_k^T A_k P_k - b \cdot \text{tr}(A_k) \right\} \quad (23)$$

其中,  $A_k$  是由超参数组成的对角矩阵。节点  $P_k$  与节点  $r_k$  间的因子定义为

$$f_{kr}(P_k, r_k) = \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} (r_k - \Phi_k P_k)^2 \right) \quad (24)$$

为了实现相邻认知用户间进行信息交互, 在相邻认知用户间定义耦合因子为

$$f_{kl}(P_k, P_l) = \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \| P_k - P_l \|^2 \right\} \quad (25)$$

其中,  $\beta$  为耦合参数,  $\beta$  值越大, 相邻节点间的耦合性越强。

### 5.2 置信传播及 $q(P_k)$ 分布式求解

在认知无线网络中认知用户间的拓扑关系用图  $G=(V, \mathcal{E})$  表示, 其中,  $V=\{1, \dots, N_c\}$  表示为节点集合。  $\mathcal{E}$  表示为相邻节点之间存在的无线链路, 即边的集合。  $\{k, l\} \subset \mathcal{E}$  表示节点  $k$  与节点  $l$  间存在连接。认知节点  $k$  的一跳邻居组成的集合为  $N(k) = \{l | \{k, l\} \in \mathcal{E}\}$ 。

依据图 2 消息传播过程为: 首先, 从节点  $\alpha_k$  到因子  $f_{k\alpha}(P_k, \alpha_k)$  发送消息  $m_{\alpha_k \rightarrow f_{k\alpha}} = \delta(\alpha_k - \bar{\alpha}_k)$ 。  $\delta(\alpha_k - \bar{\alpha}_k)$  为二元指示函数, 即

$$\delta(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) = \begin{cases} 1, & \alpha_k = \bar{\alpha}_k \\ 0, & \alpha_k \neq \bar{\alpha}_k \end{cases}$$

然后从因子  $f_{k\alpha}(P_k, \alpha_k)$  到节点  $P_k$  发送的消息定义为  $m_{f_{k\alpha} \rightarrow P_k}$ , 它是由接收到的消息与因子相乘, 然后再积分得到, 即:  $m_{f_{k\alpha} \rightarrow P_k} = \frac{1}{Z} f_{k\alpha}(P_k, \bar{\alpha}_k)$ ,  $Z$  为正则化因子。同样, 由节点  $r_k$  到因子  $f_{kr}$  发送消息定义为  $m_{r_k \rightarrow f_{kr}} = \delta(\bar{r}_k - r_k)$ , 由因子  $f_{kr}$  到节点  $P_k$  产生的消息定义为  $m_{f_{kr} \rightarrow P_k} = f_{kr}(P_k, r_k)/2$ 。在分布式稀疏贝叶斯模型中, 假定任意节点  $P_u$  向节点  $P_k$  传递消息为  $m_{f_{uk} \rightarrow P_k}$ , 定义该消息服从关于  $P_k$  的高斯分布, 即

$$m_{f_{uk} \rightarrow P_k} = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (P_k - u_{uk})^T \Sigma_{uk} (P_k - u_{uk}) \right\}$$

根据和积算法, 关于  $P_k$  的边缘分布可以表示为接收到所有消息的乘积并归一化, 即

$$q(P_k) = \frac{1}{Z} m_{f_{k\alpha} \rightarrow P_k} m_{f_{kr} \rightarrow P_k} \prod_{u \in N(k)} m_{f_{uk} \rightarrow P_k} \quad (26)$$

依据式 (26) 可推出  $q(P_k)$  的分布为高斯分布, 即

$$q(P_k) = N(P_k | u_k, \Sigma_k^{-1})$$

其中,  $\Sigma_k = \bar{A}_k + \sigma^{-2} \Phi_k \Phi_k^T + \sum_{u \in N(k)} \Sigma_{uk}$ 。

$$u_k = \Sigma_k^{-1} (\sigma^{-2} \Phi_k r_k + \sum_{u \in N(k)} \Sigma_{uk} u_{uk}) \quad (27)$$

从节点  $P_k$  到其他邻节点  $P_l$  发送的消息定义为

$$m_{P_k \rightarrow f_{kl}} = \frac{1}{Z} m_{f_{k\alpha} \rightarrow P_k} m_{f_{kr} \rightarrow P_k} \prod_{u \in N(k) \setminus l} m_{f_{uk} \rightarrow P_k}$$

$$m_{f_{kl} \rightarrow P_l} = \frac{1}{Z} \int f_{kl}(P_k, P_l) m_{P_k \rightarrow f_{kl}} dP_k$$

由此可以推导出相邻节点间传递消息的均值和方差为

$$\Sigma_{kl} = ((\bar{A}_k + \sigma^{-2} \Phi_k \Phi_k^T + \sum_{u \in N(k)} \Sigma_{uk})^{-1} + \beta^{-1} I)^{-1}$$

$$u_{kl} = (\Sigma_{kl}^{-1} - \beta^{-1} I) (\sigma^{-2} \Phi_k r_k + \sum_{u \in N(k) \setminus l} \Sigma_{uk} u_{uk}) \quad (28)$$

### 5.3 算法总结

各认知用户在计算边缘分布  $q(P_k)$  时, 消息在邻居之间相互传播会形成环, 为了使算法能够收敛, 本文采取的主要措施为: 1) 各节点同步更新消息; 2) 寻找合适的收敛条件。依据式 (27), 第  $k$  个认知用户所对应的边缘参数在第  $I$  次迭代中的表达式为

$$\Sigma_k^{(I)} = \bar{A}_k + \sigma^{-2} \Phi_k \Phi_k^T + \sum_{u \in N(k)} \Sigma_{uk}^{(I-1)}$$

$$u_k^{(I)} = (\Sigma_k^{(I)})^{-1} (\sigma^{-2} \Phi_k r_k + \sum_{u \in N(k)} \Sigma_{uk}^{(I-1)} u_{uk}^{(I-1)}) \quad (29)$$

同样, 根据式 (28) 定义在第  $I$  次迭代中相邻 2 个节点  $k, l$  间传递消息的均值与方差为

$$\Sigma_{kl}^{(I)} = ((\Sigma_k^{(I)} + \Sigma_{lk}^{(I-1)})^{-1} + \beta^{-1} I)^{-1}$$

$$u_{kl} = (\Sigma_k^{(I)} - \Sigma_{lk}^{(I-1)})^{-1} (\Sigma_k^{(I)} u_k^{(I)} - \Sigma_{lk}^{(I-1)} u_{lk}^{(I-1)}) \quad (30)$$

算法的具体步骤如下。

- 1) 初始化每个认知节点中的超参数  $\alpha_k = 0.001$ 。
- 2) 初始化迭代次数  $I = 0, \Sigma_{uk}^{(0)} = 0, u_{uk}^0 = 0$ , 以便开始进行消息传播。
- 3) 根据式(29)迭代计算中间边缘参数  $\Sigma_k^{(I)}, u_k^{(I)}$  并根据式(30)计算消息传播的均值与方差  $\Sigma_{kl}^{(I)}, u_{kl}^{(I)}$ , 检测循环可信度传播是否收敛, 若不收敛, 迭代次数加 1, 重复步骤 3) 直到收敛为止。
- 4) 计算边缘参数  $\Sigma_k, u_k$ , 更新超参数  $\alpha_{k,j}$ 。

如果超参数大于门限值  $\theta_{th}$  时，删除此超参数及相应的基函数。根据变分稀疏贝叶斯收敛条件判断变分贝叶斯学习算法是否收敛，若不收敛跳转到步骤 2)。

5) 用循环可信度传播算法计算最后的边缘参数，结束算法。

## 6 算法性能分析

### 6.1 收敛性

根据式 (20) 和式 (22) 迭代寻找变量  $P$  的  $q$  分布时，会导致不相关的超参数  $\alpha$  不收敛。为了简化计算以及算法快速收敛，本文对超参数  $\alpha$  设置门限值，算法在迭代过程中删除不收敛的超参数以及相应的基函数。在分布式变分稀疏贝叶斯算法中引入了循环可信度传播，为了确保算法的收敛性，本文采取同步工作机制，各 CR 同步更新消息。同时，通过大量实验，寻找最佳的收敛条件，具体为：第  $I$  次迭代计算的边缘参数  $u_k^{(I)}$  和  $\Sigma_k^{(I)}$  与上一次计算结果的绝对值差小于  $10^{-3}$  作为算法收敛的收敛条件。

### 6.2 算法复杂度

算法复杂度与迭代次数、相邻节点个数及消息大小有关。假定认知用户  $k$  的相邻用户有  $N(k)$  个，传播消息大小为  $H$ ，那么节点  $k$  接收的总消息大小为  $HN(k)$ 。节点  $k$  加上自身的检测消息大小为  $H(N(k)+1)$ 。假定迭代次数为  $I$ ，则算法总的复杂度为  $O(nH(N(k)+1))$ 。

### 6.3 通信负载

相邻节点间互相传递消息，实现消息共享。但是随着消息传播，网络负载也会增加。本文在实现过程中，相邻 CR 之间传递估计值，而不是原始的观测数据。同时为了进一步降低网络负载，本文在算法的迭代过程中自适应地逐步删除不收敛的超参数以及基函数，减小相邻用户间的通信量，从而降低网络负载。

## 7 实验及分析

为了验证算法的有效性，在 MATLAB 仿真平台上进行了数字仿真实验。在后继的所有仿真实验中，设定认知网络中待感知的频率范围为  $[0, \dots, 800]$  MHz，分为 20 个子信道。并假设存在 8 个授权用户分布在  $10 \times 10$  区域内， $\Delta x = 1, \Delta y = 1$ ，每个授权用户的发射功率定义在  $[10, 30]$  mW 区间内随机取值。在此区域里分布了 3 个认知用户，分别设置在  $(2.1, 7.2)$ 、 $(3.9, 2.1)$ 、

$(6.1, 8.2)$ ，信噪比为  $-5$  dB。耦合参数  $\beta = 10^6$ ，门限值  $\theta_{th} = 10^4$ 。利用本文提出的分布式变分稀疏贝叶斯算法进行频谱检测，认知用户 CR1 检测的结果如图 3 所示。其他认知用户 CR2 和 CR3 也有类似的检测结果。通过大量实验，算法迭代次数平均为 4 次。

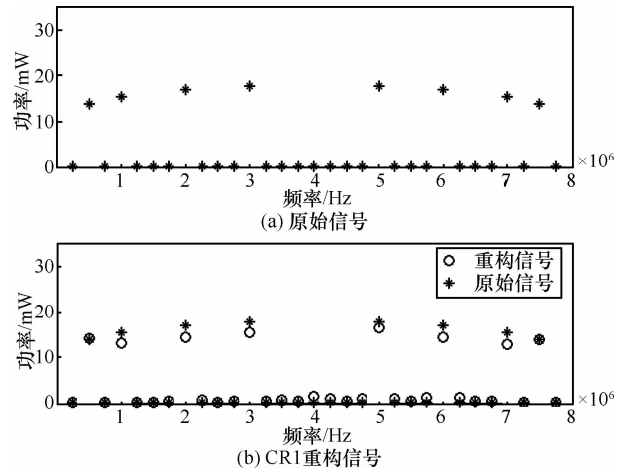


图 3 认知用户 CR1 重构结果与原始信号比较

在相同的设置环境下，利用三维坐标对授权用户的位置信息，以及相应信道的占用情况进行了检测。图 4 为 CR1 检测到的有关授权用户信息，图中星号代表授权用户在地理坐标上实际的信道使用情况，圆圈代表 CR 用户能够检测到的授权用户在地理坐标上实际的信道使用情况。从实验结果可以看到，CR1 用户能检测出授权用户的位置信息及占用的信道。同样，其他 CR 用户也有类似的检测结果。

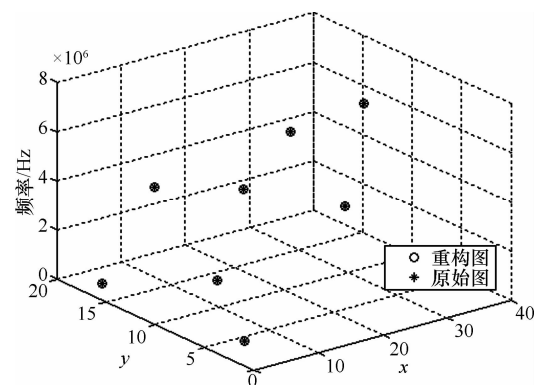


图 4 CR1 用户检测的授权用户信息

在此基础上，又验证了所提算法在不同采样率，不同信噪比下的检测性能。信噪比分别设为  $0$  dB、 $5$  dB、 $-5$  dB 下，采样率分别为  $0.2$ 、 $0.3$ 、 $0.4$ 、 $0.5$ 、 $0.6$ 、 $0.7$ 、 $0.8$ 。各认知用户的检测概率和误检测概率，其中，CR1 检测概率结果如图 5 和图 6 所示。

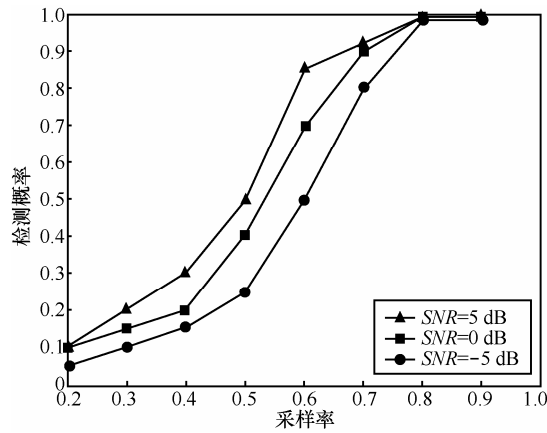


图 5 不同采样率下的检测概率

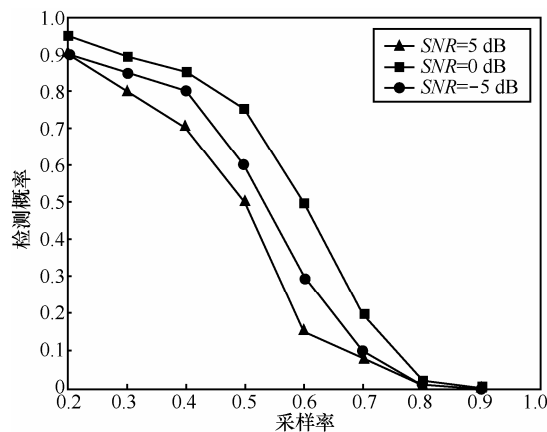


图 6 不同采样率下的误检概率

从实验结果可知，随着采样率增加，检测概率随着增加，误检测概率随着降低。为了减轻对宽带信号采样压力，本文在协同感知算法中引入了压缩采样，由此导致了感知算法性能的退化。

同时，在  $SNR=5\text{ dB}$ ，压缩比为 50%，3 个协同认知用户，耦合参数  $\beta$  和门限值  $\theta_{th}$  取不同值情况下，从均方误差 MSE 和 ROC(receiver operating characteristic)2 个方面，将本文提出的基于因子图的分布式变分稀疏贝叶斯压缩感知(DVSBL)算法与集中变分稀疏贝叶斯压缩感知(CVSBL)算法<sup>[6]</sup>，以及基于相关向量机的集中式稀疏贝叶斯感知(CSBL)算法<sup>[5]</sup>进行了对比分析，如表 1 和图 7 所示。

在基于因子图的分布式变分稀疏贝叶斯算法中存在  $\beta$  和  $\theta_{th}$  2 个参量，取值的大小会影响算法的感知精度，而在集中式算法中只存在参数  $\theta_{th}$ 。当  $\theta_{th}$  相同， $\beta$  取不同值时，CVSBL 算法的 MSE 相同，DVSBL 算法有所变化。当  $\beta$  和  $\theta_{th}$  增大时，DVSBL 算法的性能趋于最优。表 1 中的数值为多次实验结果的平均值。

表 1 不同  $\beta$  和  $\theta_{th}$  情况下 2 种算法的 MSE 比较/dB

$\beta$	$\theta_{th}$	CVSBL 算法	DVSBL 算法
$1 \times 10^4$	$1 \times 10^4$	-19.12	-18.92
$1 \times 10^6$	$1 \times 10^4$	-19.12	-20.03
$1 \times 10^8$	$1 \times 10^4$	-19.12	-20.05
$1 \times 10^6$	$1 \times 10^6$	-19.20	-20.31
$1 \times 10^8$	$1 \times 10^6$	-19.20	-20.34

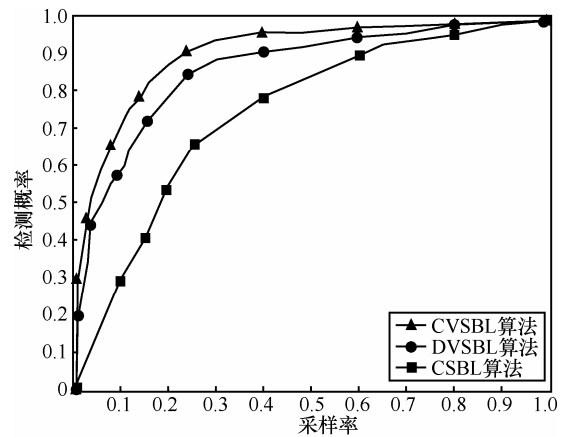


图 7 3 种感知算法的 ROC 比较

从图 7 实验结果可以看出，CVSBL 感知方法的效果最好，但由于所有认知节点要将本地的观测值传给融合中心，通信负载大，顽健性差。CSBL 算法具有较高的计算复杂度，并拥有 CVSBL 算法的缺陷。本文提出的 DVSBL 方法，在没有融合中心的前提下，它的 ROC 性能近似最优，且算法复杂度和通信负载较低。

## 8 结束语

在未来的认知无线网络中，多种共享机制会并存。要实现安全的频谱资源共享，必须对授权用户及频谱的占用情况及时、准确感知。但是，由于无线信道的复杂性和不确定性，使得相关信息的准确感知面临许多困难。针对此问题，本文探索性地将因子图引入到分布式频谱感知模型中，并采用变分近似降低计算复杂度。同时算法在计算过程中，不需要稀疏参数间交叉调整，进一步提高计算速度。

## 参考文献:

- [1] CHAKRAVARTHY V, LI X, WU Z, *et al.* Novel overlay/underlay cognitive radio waveforms using sd-smse framework to enhance spectrum efficiency-part II: analysis in fading channels[J]. IEEE Transactions on Communications, 2010, 58(6):1868-1876.
- [2] ZHI T. Compressed wideband sensing in cooperative cognitive radio

- networks[A]. The IEEE Global Communications Conference [C]. New Orleans, LA, USA, 2008.
- [3] 曾凡仔, 刘洁, 李仁发等. 基于一致优化的分布式宽带合作频谱感知算法[J]. 通信学报, 2011, 32(9):147-152.  
ZENG F Z, LIU J, LI R F, *et al.* Distributed cooperative spectrum sensing based on consensus optimization[J]. Journal on Communications, 2011, 32(9):147-152.
- [4] WANG Z X, YANG T. Markov compressive sensing in cognitive radio using factor graph[J]. Information and Electronic Engineering, 2012, 10(4):396-400.
- [5] XUE L, STEVEN H, ZHU H, *et al.* Bayesian compressed sensing based dynamic joint spectrum sensing and primary user localization for dynamic spectrum access[A]. The IEEE Global Communications Conference[C]. Houston, Texas, USA, 2011.
- [6] 朱翠涛, 杨凡. 基于变分稀疏贝叶斯学习的频谱检测方法[J]. 中南民族大学学报(自然科学版), 2013, 32(1):65-69.  
ZHU C T, YANG F. Spectrum detection based on variational sparse Bayesian learning[J]. Journal of South-Central University for Nationalities(Nat Sci Edition), 2013, 32(1):65-69.
- [7] KSCHISCHANG F R, FREY B J. Factor graphs and the sum-product algorithm[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(2): 498-519.
- [8] BISHOP C M, TIPPING M E. Variational relevance vector machines[A]. Proceedings of the 16th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence[C]. San Francisco, CA, USA, 2000. 46-53.
- [9] RAPPAPORT T S. Wireless Communications: Principles and Practice[M]. Prentice Hall PTR, 2002.
- [10] HONG S. Direct spectrum sensing from compressed measurements[A]. The IEEE Conference for Military Communications[C]. California, USA, 2011. 1187-1192.
- [11] BAZERQUE J A, GIANNAKIS G. B. Distributed spectrum sensing for cognitive radio networks by exploiting sparsity[J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2010, 58(3):1847-1862.
- [12] JI S, XUE Y, CARIN L. Bayesian compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Process, 2008, 56(6):2346-2356.
- [13] BISHOP C M. Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics)[M]. Singapore: Springer, 2006.
- [14] BUCHGRABER T, SHUTIN D. Sparse Bayesian consensus based distributed field estimation[A]. The 5th International Conference on Signal Processing and Communication Systems[C]. Honolulu, USA, 2011.

#### 作者简介:



朱翠涛(1967-), 男, 湖北郧县人, 博士, 中南民族大学教授、硕士生导师, 主要研究方向为认知无线网络、压缩感知、分布式计算等。

杨凡(1986-), 女, 山东潍坊人, 中南民族大学硕士生, 主要研究方向为压缩感知。

汪汉新(1966-), 男, 湖北武汉人, 中南民族大学副教授, 主要研究方向为认知无线网络。

李中捷(1974-), 男, 湖北武汉人, 博士, 中南民族大学副教授, 主要研究方向为异构网络干扰模型。